

# 基于不相关模态振型的修正技术

翟学<sup>1</sup>, 王建军<sup>1</sup>, 翟庆刚<sup>2</sup>

(1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2. 北京航空工程技术研究中心 可靠性工程组, 北京 100076)

**摘 要:** 为充分利用试验测量结果, 探讨了一种修正技术, 不但有效利用试验数据中与有限元模型相关的模态信息, 同时也有效利用不相关模态信息, 并成功应用于某型现代高推质比涡扇发动机结构中. 通过计算, 修正后的模型计算值与试验测试值比较接近, 误差接近 0, MAC(model assurance criteria)值接近 1. 研究表明: 利用不相关模态振型的模型修正技术能够有效得到准确的修正参数值, 且修正后的有限元模型具有很高的计算精度.

**关 键 词:** 结构动力学; 模型修正; 振动模态测量; 试验数据应用; 振型相关性; 目标函数

**中图分类号:** V232.5

**文献标志码:** A

## Updating technology based on uncorrelated mode shapes

ZHAI Xue<sup>1</sup>, WANG Jian-jun<sup>1</sup>, ZHAI Qing-gang<sup>2</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Reliability Engineering Group,

Beijing Aeronautical Technology Research Center, Beijing 100076, China)

**Abstract:** In order to make full use of the test measurement results, a method of FE (finite element) model updating with adoption of both correlated and uncorrelated modes for updating was put forward, and successfully applied in a certain type of modern high thrust-weight ratio turbofan engine. The calculated values of the modified model were close to the test values by the correction calculation. The error was close to 0 and the MAC (model assurance criteria) value close to 1. Result showed that, the proposed method was found to successfully update an FE model yielding correct estimates of the updating parameters in the presence of uncorrelated modes, and the updated FE model had a high calculation precision.

**Key words:** structural dynamics; model updating; vibration mode measurement; test data using; modes correlation; objective function

模型是力学通向工程的桥梁, 有限元建模和仿真技术作为工程机械结构动态特性预报和评估的一种有效手段已贯穿于结构设计的每个环节, 尤其在激烈的市场竞争中, 能够为产品研发节省

大量时间和试验经费. 然而, 由于建模过程中存在一定的不确定性因素和引入多种假设, 使得有限元模型必然存在误差; 如单元划分不当导致的离散误差; 连接部位的近似或等效产生的模型参数

**收稿日期:** 2015-03-09

**基金项目:** 基础科研项目

**作者简介:** 翟学(1987—), 男, 博士生, 主要研究方向为整机动力学建模与仿真. E-mail: zhaixue@buaa.edu.cn

**引用格式:** 翟学, 王建军, 翟庆刚. 基于不相关模态振型的修正技术[J]. 航空动力学报, 2017, 32(2): 405-415. ZHAI Xue, WANG Jianjun, ZHAI Qinggang. Updating technology based on uncorrelated mode shapes[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(2): 405-415.

误差;结构局部或整体的非线性导致的模型结构误差等<sup>[1]</sup>.

以提高模型计算精度为目标的结构动力学修正技术在近 30 多年来得到快速的发展. 该技术以试验振动模态数据为基础,通过计算响应值和试验实测值的相关性分析来修正有限元模型参数误差,改善并提高有限元初始模型的计算精度,通过迭代优化计算最终可获得高保真的有限元模型<sup>[2-3]</sup>. 以模态试验数据为基准的结构动力学模型修正源于 Berman 等<sup>[4]</sup>的研究工作. Collins 等<sup>[5]</sup>系统地提出基于结构试验固有频率及模态参数来修改有限元模型质量及刚度矩阵的方法. 之后几十年里,模型修正逐渐成为结构动力学研究的热点问题,国外 Mottershead 等<sup>[6]</sup>,Ahmadian 等<sup>[7]</sup>,Mares 等<sup>[8]</sup>,Marwala 等<sup>[9]</sup>,Modak<sup>[10]</sup>,国内张令弥<sup>[11]</sup>、马双超等<sup>[12]</sup>、王永华等<sup>[13]</sup>、翟学等<sup>[14-16]</sup>、任伟新等<sup>[17]</sup>做了大量的研究工作,推动了结构动力学模型修正技术的发展与完善.

模型修正技术是以振动模态试验数据为基础的. 然而,现有的修正技术是基于相关模态振型试验数据进行的,但当模型的邻近模态非常接近时,即存在“密集模态”,很难确定试验测得的某阶模态振型与有限元计算的某阶模态振型相匹配(在实际测量时,激出“纯模态”是很困难的,多数是得到结构的“密集模态”). 此时,现有模型修正方法就无法进行或修正后的有限元模型计算精度较低. 如何能够充分有效地利用试验测量结果对结构进行模型修正一直是国内外学者追求的目标和模型修正的前沿课题.

本文基于振动模态试验数据,探讨一种修正方法,不但有效利用试验数据中与有限元计算模态相关的信息,同时也有效利用不相关的模态信息,构造新的目标函数,有效解决了不能准确确定试验振动模态与有限元计算模态相匹配时模型修正的问题,且与传统模型修正方法相比,修正后的有限元模型计算精度进一步提高.

# 1 基于不相关模态振型的模型修正技术

## 1.1 振动模态数据的相关性分析

在以下公式里,角标 a 代表有限元模型数据,角标 e 代表试验数据.

无阻尼结构自由振动平衡方程为

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \tag{1}$$

其中矩阵  $M$  和  $K$  分别为结构的质量矩阵和刚度

矩阵,向量  $x$  和  $\ddot{x}$  分别为位移向量和加速度量.

基于公式  $M\ddot{x} + Kx = 0$ ,有限元模型计算得到的结构特征值和特征向量分别用  $\lambda^a$  和  $\varphi^a$  表示,由模态试验测得的结构特征值和特征向量分别用  $\lambda^e$  和  $\varphi^e$  表示.

计算振型与实测振型的相关性可以通过模态保证准则(model assurance criteria, MAC,量符号记为  $C_{ma}$ )来计算<sup>[6]</sup>. 第  $i$  阶有限元模型  $\varphi_i^a$  与第  $j$  阶试验测得振型  $\varphi_j^e$  的相关系数按照下式计算:

$$C_{ma}(\varphi_i^a, \varphi_j^e) = \frac{(\varphi_i^{aT} \varphi_j^e)^2}{(\varphi_i^{aT} \varphi_j^a)(\varphi_i^eT \varphi_j^e)} \tag{2}$$

振型相关系数(MAC 值,量符号记为  $C_{ma}$ )介于 0 和 1 之间,如果模态完全相关,则  $C_{ma} = 1$ ,如果模态完全不相关,则  $C_{ma} = 0$ . MAC 值越接近于 1,则有限元模型计算模态与试验模态的相关性就越好<sup>[18]</sup>. 实际运作时,MAC 是一个矩阵,好的相关性要求该矩阵的对角线元素大于 70%,非对角线元素小于 10%.

利用这个指标需要注意的是,当有限元模型具有系统误差或结构存在局部模态时,这个指标可能会对模型相关程度作出误判;同时,在某些情况下,虽然当试验测量得到的结构模态振型与有限元计算得到的模态振型比较相关,即 MAC 值接近于 1,但实际情况是,试验模态振型可能会与相应计算模型的前一阶(前  $n$  阶)或后一阶(后  $n$  阶)模态振型相关,此时这个指标就会误导有限元模型修正的实施,对修正结果造成较大的影响;对于具有重根的结构(如圆盘、圆筒等对称结构)而言<sup>[19]</sup>,使用 MAC 做相关分析时,两个相似试验与计算的振型向量有时会得到较低的 MAC 值,这与实际情况不符.

基于 MAC 矩阵,试验测得的结构模态信息中某些振型与有限元计算得到的模态振型的相关性(振型匹配)能够被准确地识别,而有些模态振型的相关性不能被准确地确定. 这种情况下,现有的修正方法是基于试验测试数据中确切的相关模态信息进行的,没有考虑不相关的模态信息;工程上有些甚至仅根据 MAC 矩阵,在不能确定模态振型相关性条件下进行模型修正. 所以,上述研究一方面对试验测试数据要求较高,若没有足够确切的相关性试验信息或由于某些原因试验测量数据不充分,尤其是代价昂贵的试验,如航空航天、船舶、汽车、武器等试验,模型修正是很难进行的或是十分耗时、耗力、耗钱的;另一方面由于仅利

用相关性试验数据或在不清楚试验模态与有限元计算模态相关性特性的情况下,仅根据 MAC 矩阵来进行模型修正,修正后的有限元模型精度不是很高,有时甚至不能达到工程精度的要求。

为解决上述问题,本文研究基于不相关模态振型的有限元模型修正技术,有效弥补了现有模型修正方法的不足和不能实现的功能.研究方法充分利用试验测试数据中的相关模态信息和不相关模态信息,对结构初始有限元模型进行全面的修正。

1.2 目标函数与修正计算

角标 c 代表相关(correlated)模态振型之间的参数符号,角标 u 代表不相关(uncorrelated)模态振型之间的参数符号。

令  $P_{\lambda c}$  代表试验模态与有限元计算模态相关振型所对应的特征值误差,  $P_{\lambda u}$  代表试验模态与有限元计算模态不相关振型所对应的特征值误差,  $P_{\varphi c}$  代表试验模态与有限元计算模态相关振型所对应的特征向量误差,  $P_{\varphi u}$  代表试验模态与有限元计算模态不相关振型所对应的特征向量误差。

令  $W_{\lambda c}, W_{\lambda u}, W_{\varphi c}$  和  $W_{\varphi u}$  分别代表  $P_{\lambda c}, P_{\lambda u}, P_{\varphi c}$  和  $P_{\varphi u}$  的权重因子,基于上述信息,共同构成了模型修正方法的目标函数如下<sup>[10]</sup>:

$J = W_{\lambda c} P_{\lambda c} + W_{\lambda u} P_{\lambda u} + W_{\varphi c} P_{\varphi c} + W_{\varphi u} P_{\varphi u}$  (3)

其中

$$P_{\lambda c} = \sum_{j=1}^{N_{\lambda c}} \frac{(\lambda_j^{ac} - \lambda_j^{ec})^2}{(\lambda_j^{ec})^2} \times 100$$
 (4)

$$P_{\lambda u} = \sum_{i=1}^{N_{\lambda u}} \left\{ \prod_{r=1}^{N_{\lambda u, i}} \left[ \frac{(\lambda_i^{au} - \lambda_{r, i}^{eu})^2}{(\lambda_{r, i}^{eu})^2} \times 100 \right] \right\}^{1/N_{\lambda u, i}}$$
 (5)

$$P_{\varphi c} = \sum_{j=1}^{N_{\varphi c}} \frac{\|\varphi_j^{ac} - \varphi_j^{ec}\|}{\|\varphi_j^{ec}\|} \times 100$$
 (6)

$$P_{\varphi u} = \sum_{i=1}^{N_{\varphi u}} \left[ \prod_{r=1}^{N_{\varphi u, i}} \left( \frac{\|\varphi_i^{au} - \varphi_{r, i}^{eu}\|}{\|\varphi_{r, i}^{eu}\|} \times 100 \right) \right]^{1/N_{\varphi u, i}}$$
 (7)

上述公式可以看出,此目标函数包含了试验测量模态的全部信息,既包含与有限元计算模型相关的模态信息,也包含了与有限元计算模型不相关的模态信息.其中,  $N_{\lambda c}$  为试验模态与有限元计算模态间相关振型所对应的特征值数量,  $N_{\lambda u}$  为有限元计算模型中与试验测量模态不相关振型对应的特征值数量,  $N_{\lambda u, i}$  为有限元计算模型中与试验测量模态不相关振型对应的特征值数量,  $N_{\lambda u, i}$  为试验模态数据中可能与有限元计算模

型第  $i$  阶模态相匹配的不相关振型所对应的特征值数量,  $N_{\varphi c}$  为试验模态与有限元计算模态相关振型所对应的特征向量数量,  $N_{\varphi u}$  为有限元计算模型中与试验测量模态不相关振型对应的特征向量数量,  $N_{\varphi u, i}$  为试验模态数据中可能与有限元计算模型第  $i$  阶模态相匹配的不相关振型所对应的特征向量数量。

2 典型实例研究

2.1 实例模型

研究对象为如图 1 所示的两端固支梁结构,结构尺寸如图中所示.结构的材料属性为:弹性模量  $E=2.0 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>,泊松比  $\nu=0.3$ ,密度  $\rho=7800$  kg/m<sup>3</sup>.利用 Solid186 实体单元建立结构三维实体有限元模型,采用六面体网格对模型进行划分,施加边界约束,最终建立结构初始有限元模型。

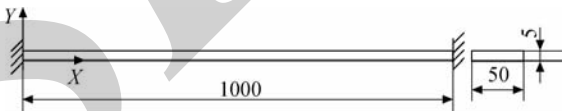


图 1 两端固支的梁结构(单位:mm)  
Fig. 1 Both ends damped beam structure (unit:mm)

2.2 振动模态试验模拟

基于数值模拟来等效代替振动模态试验,假设整体结构分为 6 个部分,如图 2 所示.每段结构通过引入一定的弹性模量误差,如表 1 所示,进而设定不同的属性值来假设模拟结构的真实状态。

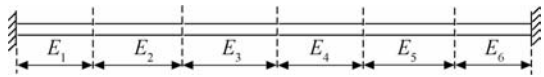


图 2 模拟试验梁结构  
Fig. 2 Simulated test beam structure

表 1 有限元模型和模拟试验模型间的偏差  
Table 1 Deviation in models between finite element and simulated

| 弹性模量 | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | $E_5$ | $E_6$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 误差/% | -10   | +50   | +25   | -30   | +20   | +60   |

设置每段结构不同的材料属性值,建立整体结构三维实体有限元模型如图 3 所示.其中不同颜色代表各段结构的材料属性,施加边界条件,最

终建立分析模型,用于等效模拟结构的真实状态,且计算得到的固有频率及振型用于等效代替真实试验测得的模态数据.

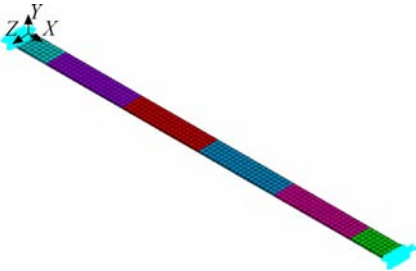


图 3 模拟试验有限元模型  
Fig. 3 Simulated test FEM

2.3 模型修正计算过程

每段结构的弹性模量为待修正参数,即有 6 个参数,分别为  $u_1 \sim u_6$ . 每段结构引入的误差详情如表 1 所示.

模型修正以模拟试验(以下称模态试验)的前 3 阶固有频率(特征值)及振型(特征向量)为依据. 研究对象为两端固支的梁结构,初始有限元计算模型的第 1 阶模态特征值/特征向量与模态试验的第 1 阶模态特征值/特征向量相关.

为有效验证基于不相关模态数据的模型修正方法,假设不能够准确确定有限元计算模型的第 2 阶、第 3 阶模态信息与模态试验的第 2 阶、第 3 阶模态信息的相关性,但能够得到可靠的信息是有限元计算模型的第 2 阶模态振型可能与试验测量的第 2 阶模态振型相关,也可能与试验测量的第 3 阶模态振型相关;有限元计算模型的第 3 阶模态振型可能与试验测量的第 2 阶模态振型相关,也可能与试验测量的第 3 阶模态振型相关.

基于以上分析形成矩阵相关性如表 2 所示,由于能够准确确定试验第 1 阶模态振型(记为 1E)与有限元计算第 1 阶模态振型(记为 1A)是相关的,即模态振型(1A,1E)是相关振型,而不能准确确定试验第 2,3 阶模态振型(记为 2E,3E)与有限元计算第 2,3 阶模态振型(记为 2A,3A)的相关性,即模态振型(2A,2E),(2A,3E)和(3A,2E),(3A,3E)是不相关振型. 基于第 1 章不相关模态振型的模型修正理论,能够得到本实例的下列参数值

$L_a = \{2,3\}; L_e = \{2,3\}$  (8)

$N_{\lambda_{ue},1} = 2; N_{\lambda_{ue},2} = 2$  (9)

$L_{a,1} = 2; L_{a,2} = 3$  (10)

$N_{\lambda_{ue},1} = 2; N_{\lambda_{ue},2} = 2$  (11)

$L_{e,1} = \{2,3\}; L_{e,2} = \{2,3\}$  (12)

表 2 有限元模态振型与试验测试模态振型的相关性  
Table 2 Correlation between finite element and test mode shapes

| 有限元模型阶数 | 试验测试模型阶数 |
|---------|----------|
| 1       | 1        |
| 2       | 2,3      |
| 3       | 2,3      |

对结构初始有限元模型进行修正,现在的主要目标是求解目标函数  $J$ . 目标函数  $J$  中的 4 个权重因子  $W_{\lambda_c}, W_{\lambda_u}, W_{\varphi_c}$  和  $W_{\varphi_u}$  设为单位 1. 目标函数由 4 项误差函数组成,既包括相关模态信息,也包含不相关模态信息. 基于具体实例计算介绍修正方法的实现过程,首先研究单个修正参数  $u_1$ , 保证其他修正参数都处于准确值,即  $u_2 = 0.5, u_3 = 0.25, u_4 = -0.3, u_5 = 0.2, u_6 = 0.6$ .

计算误差函数  $P_{\lambda_c}$  和  $P_{\lambda_u}$ . 对于  $P_{\lambda_c}$ ,实例中有限元计算模型和试验测试数据中只有一对相关模态振型,即第 1 阶模态振型,所以式(4)中  $N_{\lambda_c} = 1$ ,则

$$P_{\lambda_c} = \frac{(\lambda_1^{ac} - \lambda_1^{ec})^2}{(\lambda_1^{ec})^2} \times 100$$
 (13)

误差函数  $P_{\lambda_c}$  与修正参数  $u_1$  有关,设置  $u_1$  的变化范围为  $\pm(95\% E_1) = \pm(0.95 \times 1.8 \times 10^5)$ . 对误差函数  $P_{\lambda_c}$  进行计算,得到  $P_{\lambda_c}$  在  $u_1 = -0.1$  时达到最小值且等于 0,说明  $-0.1$  是参数  $u_1$  的准确修正值,如图 4 所示.

接下来计算误差函数  $P_{\lambda_u}$ .  $P_{\lambda_u}$  是有限元计算模型和试验测试数据中不相关振型所对应的特征值误差函数,实例中有限元计算模型和试验测试

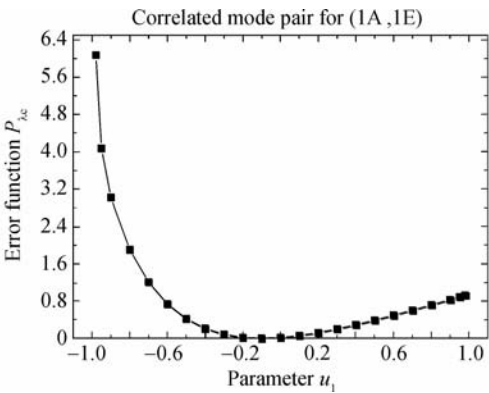


图 4 误差函数  $P_{\lambda_c}$  随参数  $u_1$  的变化  
Fig. 4 Variation of error function  $P_{\lambda_c}$  with parameter  $u_1$

数据中的不相关振型如表 2 所示,误差函数公式  $P_{\lambda u}$  可写成如下形式:

$$P_{\lambda u} = \sum_{i=1}^{N_{\lambda u a}} (\alpha_{A_i E_i})^{1/N_{\lambda u e, i}} \quad (14)$$

其中

$$\alpha_{A_i E_i} = \prod_{r=1}^{N_{\lambda u e, i}} \left[ \frac{(\lambda_i^{au} - \lambda_{r,i}^{eu})^2}{(\lambda_{r,i}^{eu})^2} \times 100 \right] = \prod_{r=1}^{N_{\lambda u e, i}} \beta_{ir} \quad (15)$$

本实例中

$$N_{\lambda u a} = 2 \quad N_{\lambda u e, 1} = 2 \quad N_{\lambda u e, 2} = 2$$

则

$$\alpha_{A_2 E_2} = \beta_{22} \times \beta_{23} \quad (16)$$

$$\alpha_{A_3 E_3} = \beta_{32} \times \beta_{33} \quad (17)$$

$$\beta_{ir} = \frac{(\lambda_i^{au} - \lambda_{r,i}^{eu})^2}{(\lambda_{r,i}^{eu})^2} \times 100 \quad (18)$$

分别计算  $\beta_{22}$ 、 $\beta_{23}$ 、 $\beta_{32}$  和  $\beta_{33}$ 。图 5 和图 6 分别是函数  $\beta_{22}$  和  $\beta_{23}$  随修正参数  $u_1$  的计算结果。图 5 可以看出,  $\beta_{22}$  只有在  $u_1 = -0.1$  时等于 0, 而在  $-0.1$  这个点的两侧数值都大于 0。说明有限元计算第 2 阶模态振型确实与试验测试第 2 阶模态振型相关; 图 6 可以看出,  $\beta_{23}$  在  $u_1 = -0.1$  时不等于 0, 且在整个范围内都是非零值, 这是因为有限元计算第 2 阶模态振型确实与试验测试第 3 阶模态振型不相关,  $\beta_{23}$  的值随着  $u_1$  的增加而减小, 说明有限元计算第 2 阶特征值逐渐增大, 且慢慢接近第 3 阶试验特征值。图 7 是函数  $\alpha_{A_2 E_2} = \beta_{22} \times \beta_{23}$  随  $u_1$  变化的计算结果, 是图 5 和图 6 的综合。  $\alpha_{A_2 E_2}$  在  $u_1 = -0.1$  时等于 0, 而在  $-0.1$  这个点的两侧数值都大于 0。

图 8 和图 9 分别是函数  $\beta_{32}$  和  $\beta_{33}$  随修正参数  $u_1$  的计算结果。图 9 可以看出,  $\beta_{33}$  只有在  $u_1 = -0.1$  时等于 0, 而在  $-0.1$  这个点的两侧数值都

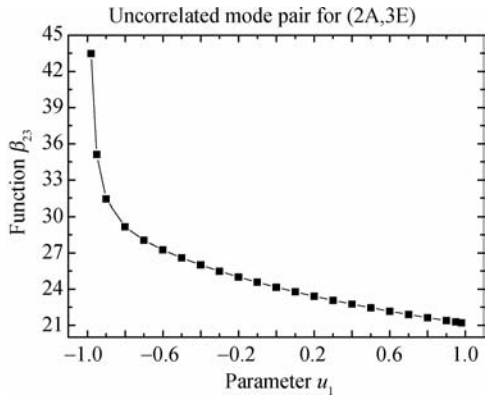


图 6 函数  $\beta_{23}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 6 Variation of function  $\beta_{23}$  with parameter  $u_1$

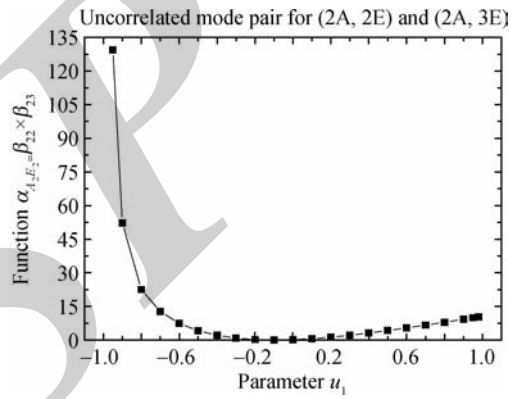


图 7 函数  $\alpha_{A_2 E_2} = \beta_{22} \times \beta_{23}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 7 Variation of function  $\alpha_{A_2 E_2} = \beta_{22} \times \beta_{23}$  with parameter  $u_1$

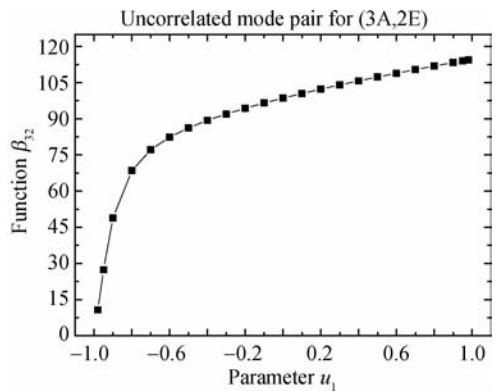


图 8 函数  $\beta_{32}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 8 Variation of function  $\beta_{32}$  with parameter  $u_1$

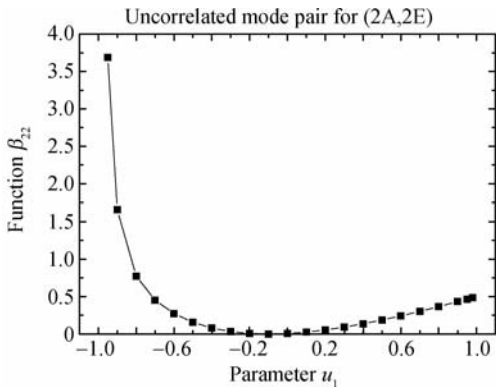


图 5 函数  $\beta_{22}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 5 Variation of function  $\beta_{22}$  with parameter  $u_1$

大于 0。说明有限元计算第 3 阶模态振型确实与试验测试第 3 阶模态振型相关; 图 8 可以看出,  $\beta_{32}$  在  $u_1 = -0.1$  时不等于 0, 且在整个范围内都是非零值, 这是因为有限元计算第 3 阶模态振型确实与试验测试第 2 阶模态振型不相关,  $\beta_{32}$  的值随着  $u_1$  的增加而增大, 说明有限元计算第 3 阶特征

值逐渐增大,且越来越远离第 2 阶试验特征值。图 10 是函数  $\alpha_{A_3 E_3} = \beta_{32} \times \beta_{33}$  随修正参数  $u_1$  的计算结果,是图 8 和图 9 的综合。 $\alpha_{A_3 E_3}$  在  $u_1 = -0.1$  时等于 0,而在  $-0.1$  这个点的两侧数值都大于 0。

深入分析图 5~图 10 的计算结果能够看出,虽然在不能确定有限元计算模态振型与试验测试模态振型相关性的前提下,但只有当有限元计算振型与试验测试振型相关时,计算函数值为 0,不相关时,计算函数值不为 0。

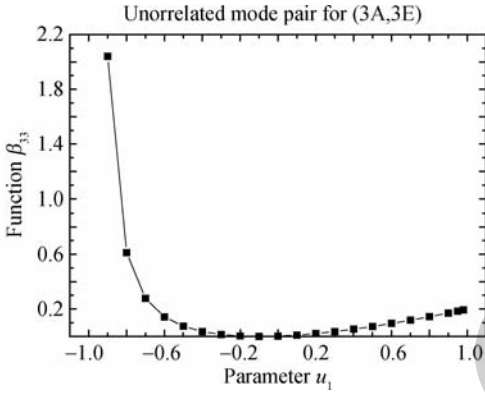


图 9 函数  $\beta_{33}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 9 Variation of function  $\beta_{33}$  with parameter  $u_1$

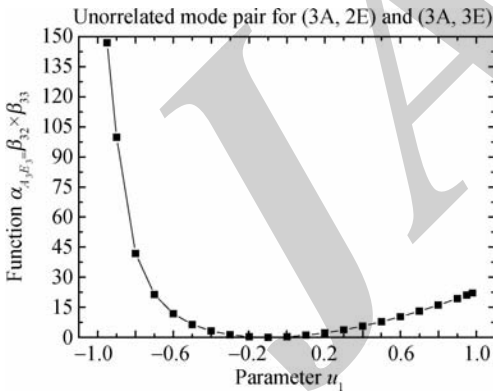


图 10 函数  $\alpha_{A_3 E_3} = \beta_{32} \times \beta_{33}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 10 Variation of function  $\alpha_{A_3 E_3} = \beta_{32} \times \beta_{33}$  with parameter  $u_1$

误差函数  $\alpha_{A_2 E_2} = \beta_{22} \times \beta_{23}$  在修正参数的准确值上等于 0,因为有限元计算模型的第 2 阶模态振型与试验测试的第 2 阶模态振型相关,所以  $\beta_{22}$  在修正参数准确值这一点等于 0,虽然  $\beta_{23}$  并不在修正参数准确值这一点等于 0。如果假设有限元计算模型的第 2 阶模态振型与试验测试的第 3 阶模态振型相关,那么  $\beta_{23}$  就在修正参数准确值这一点等于 0,而  $\beta_{22}$  在修正参数准确值这一点不等于

0,所以误差函数  $\alpha_{A_2 E_2}$  必定收敛,同理函数  $\alpha_{A_3 E_3}$  也必定收敛。

以上结论说明,在不能确定有限元模态振型与试验测试模态振型相关性的前提下,基于本文修正方法能够自动识别试验测试模态与有限元计算模态的相关振型和不相关振型,且通过目标函数的每一项能够准确确定试验模态振型与有限元模态振型的相关性。

图 11 是误差函数  $P_{\lambda u}$  随修正参数  $u_1$  的计算结果, $P_{\lambda u}$  只有在  $u_1 = -0.1$  时等于 0,而在  $-0.1$  这个点的两侧数值都大于 0,因为函数  $\alpha_{A_2 E_2}$  和函数  $\alpha_{A_3 E_3}$  都在  $u_1 = -0.1$  时等于 0,所以

$$P_{\lambda u} = \sum_{i=1}^{N_{\lambda u}} (\alpha_{A_i E_i}^{1/N_{\lambda u, i}}) = 0 \quad (19)$$

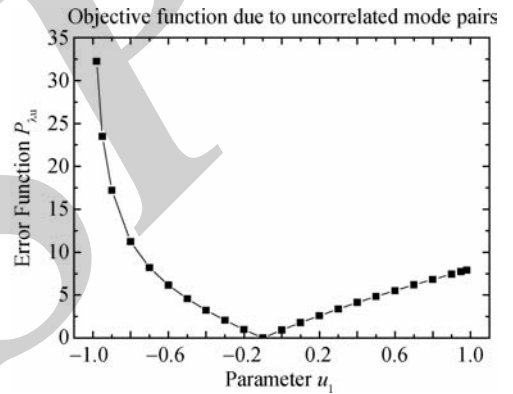


图 11 误差函数  $P_{\lambda u}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 11 Variation of error function  $P_{\lambda u}$  with parameter  $u_1$

上述详细介绍了误差函数  $P_{\lambda c}$  和  $P_{\lambda u}$  的计算过程,误差函数  $P_{\varphi c}$  和  $P_{\varphi u}$  随修正参数  $u_1$  的计算过程与此相同。最终基于 4 项误差函数  $P_{\lambda c}$ ,  $P_{\lambda u}$ ,  $P_{\varphi c}$  和  $P_{\varphi u}$ , 得到修正目标函数  $J$  的计算结果如图 12 所示,目标函数  $J$  在  $u_1 = -0.1$  时达到最小值且等于 0。

通过上述研究一个修正参数变化,详细论述了基于不相关模态振型的模型修正计算过程,基于模态测试数据,有 6 个参数需要修正。同理,基于上述计算过程,当目标函数达到最小值,最终计算得到 6 个修正参数的准确值为  $u_1 = -0.1$ ;  $u_2 = 0.5$ ;  $u_3 = 0.25$ ;  $u_4 = -0.3$ ;  $u_5 = 0.2$ ;  $u_6 = 0.6$ 。修正结果如图 13 所示,修正结果与表 2 中数值一致。

有限元模型修正前与修正后的计算结果如表 3 所示,比较研究了计算结果与模态实测数据的前 5 阶固有频率和振型的 MAC 值。修正后结构

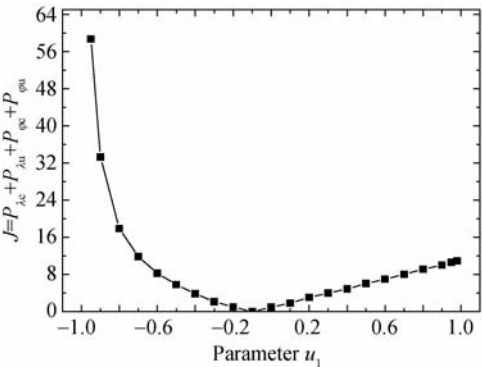


图 12 目标函数  $J = P_{\lambda c} + P_{\lambda u} + P_{\varphi c} + P_{\varphi u}$  随参数  $u_1$  的变化

Fig. 12 Variation of objective function  $J = P_{\lambda c} + P_{\lambda u} + P_{\varphi c} + P_{\varphi u}$  with parameter  $u_1$

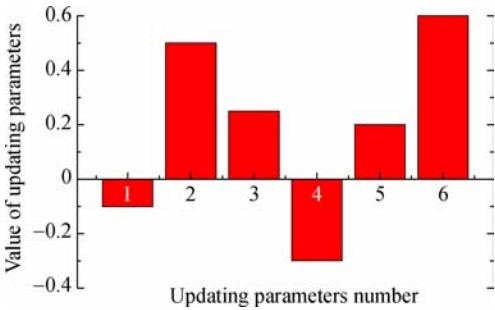


图 13 修正参数值

Fig. 13 Value of the updated parameters

表 3 模型修正前后固有频率试验测试值与有限元计算值的比较  
Table 3 Comparison of the test and FE calculation natural frequencies before and after updating

| 阶数 | 固有频率<br>试验值/Hz | 修正前               |      |          | 修正后               |      |          |
|----|----------------|-------------------|------|----------|-------------------|------|----------|
|    |                | 固有频率有限元<br>计算值/Hz | 误差/% | $C_{ma}$ | 固有频率有限元<br>计算值/Hz | 误差/% | $C_{ma}$ |
| 1  | 27.35          | 26.20             | 4.2  | 0.999    | 27.35             | 0    | 1.000    |
| 2  | 76.70          | 72.20             | 5.9  | 0.996    | 76.70             | 0    | 1.000    |
| 3  | 152.05         | 141.53            | 6.9  | 0.993    | 152.05            | 0    | 1.000    |
| 4  | 249.05         | 233.96            | 6.1  | 0.993    | 249.05            | 0    | 1.000    |
| 5  | 267.95         | 256.41            | 4.3  | 0.999    | 267.95            | 0    | 1.000    |

分析模型计算的固有频率与模态试验测试的固有频率非常接近,不但研究的前 3 阶固有频率有很好的-一致性,而且修正后有限元模型计算的前 5 阶固有频率也有很好的一致性,有限元计算与试验测试振型的 MAC 值亦是如此.表中第 2 阶和第 3 阶振型的 MAC 值都为 1,证明了利用不相关模态振型的模型修正方法能够很好的自动识别分析模型与试验实测模型的相关性.

3 某航空发动机机匣结构模型修正

3.1 航空发动机静子结构特征分析

将上述基于不相关模态振型的模型修正方法应用于现代某型高推质比涡扇发动机静子机匣中.机匣结构是航空发动机的重要组成部分,其动力学特性对发动机转子的临界转速以及发动机的整机动力学特性具有重要的影响.然而,在有限元建模过程中,难免引入一定的不确定性因素和建模误差,尤其是连接部件的等效模拟和建模方法

无法有效模拟连接结构的实际力学特性,从而导致发动机静子机匣的有限元计算结果与试验测试结果之间存在一定的偏差,如固有频率和模态振型偏离实际结构的真实值.

航空发动机静子系统是典型的薄壁圆筒结构,且结构比较复杂,从而导致结构的模态振型比较复杂.某些相邻的若干阶固有频率和模态振型比较接近,此外,航空发动机静子系统-中的某些机匣结构是对称的,所以模型的邻近模态非常接近,即存在较多的“密集模态”,很难确定试验测得的某阶模态振型与有限元计算的某阶模态振型的相关性.

现有结构动力学模型修正技术是以实测固有频率和模态振型为基础来修正结构有限元模型的,然而当固有频率和模态振型比较接近时则很难确认实测模态信息与有限元模态信息的相关性,所以对于航空发动机静子机匣这种具有典型结构特征的机械系统,若以现有模型修正方法,很难进行模型修正或修正后的有限元模型计算精度

较低.

为此,将基于上述基于不相关模态振型的模型修正方法,充分有效的利用试验测量结果对机匣结构进行模型修正,既有效地利用了试验数据中与有限元计算模态相关的信息,也有效地利用了试验数据中与有限元计算模态不相关的信息,构造新的目标函数,进而有效提高机匣结构有限元模型的计算精度.

3.2 航空发动机静子机匣有限元模型

现代某型高推质比涡扇发动机静子系统包含中介机匣、复合外涵,承力外机匣和加力段机匣 4 个部分,各机匣与前后机匣通过螺栓连接构成航空发动机静子机匣系统. 静子机匣初始有限元模型如图 14 所示,共有 49152 个单元和 91485 个节点,前面两个主安装节约束 3 个方向,后面辅助安装节约束一个方向.

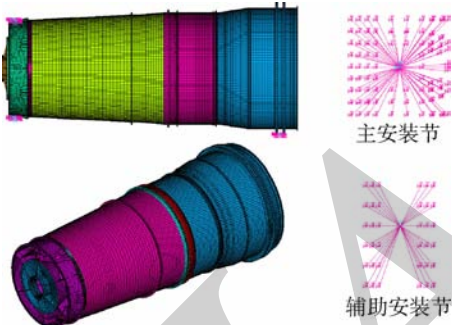


图 14 某航空发动机静子机匣初始有限元模型  
Fig. 14 Initial FE model of an aero-engine stator casing

航空发动机静子结构中的螺栓连接主要承受拉、压和弯曲载荷,因为切向载荷主要是靠法兰接触面间的摩擦作用承受和止扣作用承受<sup>[20]</sup>. 采用弹簧单元参数化建模方法来等效模拟航空发动机系统中的螺栓连接结构实际特性<sup>[21]</sup>,如图 15 所示. 首先将螺栓连接部件接触面处的对应节点径向耦合,保证剪切刚度很大,然后在对应节点处添加轴向弹簧将螺栓连接部件连接起来,分别模拟中介机匣与复合外涵之间的螺栓连接、复合外涵

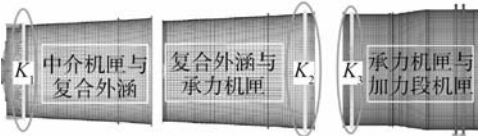


图 15 各段机匣螺栓连接结构模型  
Fig. 15 Bolt connection structure model of aero-engine casings

与承力外机匣之间的螺栓连接、承力外机匣和加力段机匣之间的螺栓连接.

3.3 静子机匣结构模型修正

建立航空发动机静子机匣初始有限元模型,将螺栓连接位置作为主要的建模误差源. 试验状态下,螺栓连接刚度为  $K_1=2.3\times10^8\text{ N/m}$ ;  $K_2=1.5\times10^8\text{ N/m}$ ;  $K_3=1.0\times10^8\text{ N/m}$ .

试验测得和有限元计算得到静子机匣固有频率如表 8 所示. 静子机匣初始有限元模型的固有频率与试验测试固有频率存在一定的偏差,最大误差为 22.7%. 试验测得航空发动机静子机匣模态振型与有限元计算模态振型的 MAC 矩阵如表 4 所示,试验振型与对应的有限元计算振型存在较大的偏差,初始有限元模型无法准确表达静子机匣的实际动力特性,需要利用试验模态数据对机匣结构初始模型进行修正,以提高模型的计算精度若利用传统动力学模型修正技术对结构有限元模型进行修正,则基于表 4 的 MAC 矩阵值,将以如表 5 所示的方式利用振动模态试验数据,这势必会造成有限元模型修正计算存在较大的误差,即使修正后的结构有限元模型也无法准确表达机匣的动力学特性.

基于不相关模态振型的模型修正技术对航空发动机静子机匣进行修正,振动试验数据的利用如表 6 所示. 因为根据表 4 的 MAC 矩阵,能够确定试验测试的第 1 阶和第 2 阶模态振型与有限元计算的第 1 阶和第 2 阶模态振型是相关的,而无法确定试验测试其他阶模态振型与相应的有限元计算模态振型的相关性. 基于本文的模态振型相关性理论,试验测试模态振型与有限元计算模态振型的不相关振型对如表 6 所示.

基于上述模型修正计算过程,利用振动模态试验数据与有限元计算模态数据的相关振型对和不相关振型对,对某型航空发动机静子机匣结构进行模型修正,最终得到了修正后的有限元模型计算值,如表 7 所示. 通过比较有限元模型修正前和修正后的计算结果可知,修正后结构有限元模型的固有频率和模态振型与试验测试值十分接近,静子机匣有限元模型得到了很好的改善,充分证明了基于不相关模态振型的模型修正方法具有较高的计算精度,能够得到某型航空发动机静子机匣高保真有限元模型,从而使修正后的静子机匣模型能够可靠地应用在后续的发动机整机动力学分析及健康监测等方面.

表 4 试验测试与有限元计算模态振型的 MAC 矩阵值

Table 4 MAC matrix values between test and FE calculation mode shapes

| 有限元<br>模型计算<br>模态振型 | 模拟试验测试模态振型 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     | 1E         | 2E    | 3E    | 4E    | 5E    | 6E    | 7E    | 8E    | 9E    | 10E   | 11E   | 12E   |
| 1A                  | 0.982      | 0     | 0     | 0     | 0.002 | 0     | 0.005 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.009 |
| 2A                  | 0          | 0.546 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.001 | 0     | 0     | 0.006 | 0     |
| 3A                  | 0          | 0     | 0.490 | 0.421 | 0     | 0.002 | 0     | 0.015 | 0     | 0.004 | 0.001 | 0     |
| 4A                  | 0          | 0     | 0.466 | 0.532 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 5A                  | 0.017      | 0     | 0     | 0     | 0.245 | 0     | 0.331 | 0     | 0     | 0     | 0.005 | 0.077 |
| 6A                  | 0          | 0     | 0.035 | 0.040 | 0     | 0.055 | 0     | 0.297 | 0.011 | 0.060 | 0.011 | 0     |
| 7A                  | 0          | 0     | 0     | 0     | 0.658 | 0     | 0.280 | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.023 |
| 8A                  | 0          | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.876 | 0     | 0.015 | 0     | 0.068 | 0     | 0     |
| 9A                  | 0.001      | 0     | 0     | 0     | 0.027 | 0     | 0.001 | 0     | 0.311 | 0.001 | 0.011 | 0.403 |
| 10A                 | 0          | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.001 | 0     | 0.002 | 0.907 | 0.073 | 0.001 | 0.002 |
| A11                 | 0          | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.007 | 0     | 0.277 | 0.036 | 0.247 | 0.349 | 0.010 |
| A12                 | 0          | 0     | 0     | 0     | 0     | 0.036 | 0     | 0     | 0.020 | 0.477 | 0.423 | 0.005 |

表 5 传统模型修正方法的试验数据利用

Table 5 Test data using of conventional model updating method

| 有限元模型计算<br>模态振型 | 模拟试验测试<br>模态振型 | $C_{ma}$ |
|-----------------|----------------|----------|
| 1A              | 1E             | 0.982    |
| 2A              | 2E             | 0.546    |
| 3A              | 3E             | 0.490    |
| 4A              | 4E             | 0.532    |
| 5A              | 7E             | 0.331    |
| 6A              | 8E             | 0.297    |
| 7A              | 5E             | 0.658    |
| 8A              | 6E             | 0.876    |
| 9A              | 12E            | 0.403    |
| 10A             | 9E             | 0.907    |
| 11A             | 11E            | 0.349    |
| 12A             | 10E            | 0.477    |

表 6 不相关模态振型修正方法对试验数据的利用

Table 6 Test data using of uncorrelated mode shape updating method

| 有限元模型计算模态振型 | 模拟试验测试模态振型     |
|-------------|----------------|
| 1A          | 1E             |
| 2A          | 2E             |
| 3A          | 3E,4E          |
| 4A          | 3E,4E          |
| 5A          | 5E,7E          |
| 6A          | 6E,8E          |
| 7A          | 5E,7E          |
| 8A          | 6E,8E          |
| 9A          | 9E,10E,11E,12E |
| 10A         | 9E,10E,11E,12E |
| 11A         | 9E,10E,11E,12E |
| 12A         | 9E,10E,11E,12E |

表 7 航空发动机静子机匣结构整机模型修正结果  
Table 7 Updating result of aero-engine stator casing model

| 阶数 | 固有频率<br>试验值/Hz | 修正前        |      | 修正后        |      | $C_{ma}$ |
|----|----------------|------------|------|------------|------|----------|
|    |                | 固有频率计算值/Hz | 误差/% | 固有频率计算值/Hz | 误差/% |          |
| 1  | 57.525         | 53.982     | 6.2  | 57.525     | 0    | 1.0000   |
| 2  | 91.091         | 78.404     | 14.0 | 91.091     | 0    | 1.0000   |
| 3  | 96.218         | 85.734     | 10.9 | 96.218     | 0    | 1.0000   |
| 4  | 97.739         | 94.808     | 3.0  | 97.739     | 0    | 1.0000   |
| 5  | 153.45         | 118.56     | 22.7 | 153.45     | 0    | 1.0000   |
| 6  | 156.51         | 140.05     | 10.5 | 156.51     | 0    | 1.0000   |
| 7  | 161.71         | 148.36     | 8.3  | 161.71     | 0    | 1.0000   |
| 8  | 162.94         | 149.36     | 8.3  | 162.94     | 0    | 1.0000   |
| 9  | 164.55         | 154.57     | 6.1  | 164.55     | 0    | 1.0000   |
| 10 | 169.3          | 162.19     | 4.2  | 169.3      | 0    | 1.0000   |
| 11 | 171.69         | 163.18     | 5.0  | 171.69     | 0    | 1.0000   |
| 12 | 174.01         | 166.58     | 4.3  | 174.01     | 0    | 1.0000   |

4 结 论

本文基于振动模态试验数据,主要研究不相关模态振型的结构动力学模型修正技术,有效解决了现有模型修正对试验数据利用存在的不足和缺陷,使修正后的结构有限元模型能够更好的描述实际结构特性.

通过实例计算,验证了模型修正技术理论与方法的准确性,同时详细阐述了其实施过程,并对现代某型高推质比涡扇发动机静子机匣进行修正研究.基于机匣结构的特征、特点与实际情况,充分利用试验数据与发动机静子机匣初始有限元模型之间的相关性特征,最终建立了某型航空发动机高保真仿真模型.研究表明,本文模型修正技术能够有效解决工程中大型复杂机械结构的模型修正问题,提高模型计算精度,建立结构高保真有限元模型.

参考文献:

[ 1 ] Friswell M I,Mottershead J E. Finiteelement model updating in structural dynamics[M]. Berlin: Springer Netherlands,1995.

[ 2 ] Zapico-Valle J L,Alonso-Cambor R,González-Martínez M P,et al. A new method for finite element model updating in structural dynamics [J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2010,24(7):2137-2159.

[ 3 ] 朱跃. 基于分层思想的复杂机械结构模型修正及确认技术

研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2010.

ZHU Yue. Study onmodel updating and validation technology of complex mechanical structure based on hierarchical method[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,2010. (in Chinese)

[ 4 ] Berman A,Flannelly W G. Theory of incomplete models of dynamic[J]. AIAA Journal,1971,9(8):1481-1487.

[ 5 ] Collins J D,Hart G C,Haselman T K. Statistical identification of structure[J]. AIAA Journal,1974,12(2):185-190.

[ 6 ] Mottershead J E,Friswell M I. Model updating in structural dynamics;a survey[J]. Journal of Sound and Vibration,1993,167(2):347-375.

[ 7 ] Ahmadian H,Gladwell G M L,Ismail F. Parameter selection strategies in finite element model updating[J]. Journal of Vibration and Acoustics,1997,119(1):37-45.

[ 8 ] Mares C,Mottershead J E,Friswell M I. Results obtained by minimizing natural-frequency errors and using physical reasoning[J]. Mechanical Systems and Signal Processing,2003,17(1):39-46.

[ 9 ] Marwala T,Sibisi S. Finite element updating using bayesian framework and modal properties[J]. Journal of Aircraft,2005,42(1):275-278.

[10] Modak S V. Model updating using uncorrelated modes[J]. Journal of Sound and Vibration,2014,333(11):2297-2322.

[11] 张令弥. 动态有限元模型修正技术及其在航空航天结构中的应用[J]. 强度与环境,1994(2):10-17.

ZHANG Lingmi. Dynamic finite element model updating and its application in aerospace structures [J]. Structure and Environment Engineering, 1994(2):10-17. (in Chinese)

[12] 马双超,臧朝平,兰海波.某航空发动机机匣的动力学模型修正[J].航空动力学报,2013,28(4):878-884.  
MA Shuangchao,ZANG Chaoping,LAN Haibo. Dynamic model updating of an aero-engine casing[J]. Journal of Aerospace Power,2013,28(4):878-884. (in Chinese)

[13] 王永华,杨欣毅,苏珉,等.熵判别粒子群优化算法在发动机模型修正中的应用[J].航空动力学报,2013,28(1):74-81.  
WANG Yonghua,YANG Xinyi,SU Min, et al. Engine model correction based on entropy criterion PSO[J]. Journal of Aerospace Power,2013,28(1):74-81. (in Chinese)

[14] ZHAI Xue,ZHAI Qinggang,WANG Jianjun. Dynamic model updating for bolted flange joints in the pipe structure[R]. Sanya,China; International Conference on Simulation and Modeling Methodologies,Technologies and Applications,2014.

[15] 艾延廷,翟学,乔永利.基于有限元法的螺栓连接结构模态参数识别[J].中国机械工程,2012,8(23):957-960.  
AI Yanting,ZHAI Xue,QIAO Yongli. Identification of bolt connected structure modals based on FEM[J]. China Mechanical Engineering,2012,8(23):957-960. (in Chinese)

[16] ZHAI Xue,ZHAI Qinggang,WANG Jianjun,et al. Modeling and updating for bolted joints structure in aero-engine stator system[J]. Journal of Propulsion Technology,2015,36(3):450-457.

[17] Ren W X,Chen H B. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method[J]. Engineering Structures,2010,32(8):2455-2465.

[18] ZANG Chaoping,Ewins D J. Model validation for structural dynamics in the aero-engine design process[J]. Frontiers of Energy and Power Engineering in China,2009,3(4):480-488.

[19] 马双超.航空发动机机匣模型确认与动力学特性研究[D].南京:南京航空航天大学,2012.  
MA Shuangchao. Structure dynamic analysis and model validation of aero-engine casings[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,2012. (in Chinese)

[20] LIU Shuguo,WANG Jun,HONG Jie, et al. Dynamics design of the aero-engine rotor joint structures based on experimental and numerical study[R]. Glasgow UK: ASME Turbo Expo,2010.

[21] ZHAI Xue,ZHAI Qinggang,WANG Jianjun, et al. Research on parameterized modeling technology for the bolted joints structure[R]. Bangkok, Thailand; International Conference on Aerospace and Mechanical Engineering,2014.

(编辑:王碧琚)